



UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS AGRÁRIAS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA FLORESTAL

Disciplina: DEF 06423 – Economia da Engenharia

Prof. Wendel Andrade

ROTEIRO DE ESTUDOS: conteúdo parcial da disciplina

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

1. Conceitos

1.1. Juro

É a remuneração do capital emprestado, podendo ser entendido, de forma simplificada, como sendo o aluguel pago pelo uso do dinheiro.

Ao se dispor a emprestar, o possuidor de dinheiro, para avaliar a taxa de remuneração para os seus recursos, deve atentar para os seguintes fatores:

- i) Risco – Probabilidade de o tomador do empréstimo não resgatar o dinheiro.
- ii) Despesas - Todas as despesas operacionais, contratuais e tributárias par a formalização do empréstimo e à efetivação da cobrança.
- iii) Inflação – Índice de desvalorização do poder aquisitivo da moeda previsto para o prazo do empréstimo.
- iv) Ganho (ou lucro) – Fixado em função das demais oportunidades de investimentos (custo de oportunidade); justifica-se pela privação, por parte do seu dono, da utilidade do capital.

1.2. Capital

Do ponto de vista da matemática financeira é qualquer valor expresso em moeda e disponível em determinada época.

1.3. Taxa de Juros

A taxa de juros (i) é a razão entre os juros (J) recebidos (ou pagos) no final de certo período de tempo e o capital (P) inicialmente aplicado (ou emprestado).

Sendo:

J = Valor dos juros

P = Valor do capital inicial ou principal

S = Montante ou valor futuro

i = Taxa de juros

n = Prazo

$$i = \frac{J}{P}$$

$$J = S - P$$

$$\text{Se } J = S - P \quad ; \quad i = \frac{S-P}{P} \quad ; \quad i = \frac{S}{P} - 1$$

2. Capitalização Simples

É aquela em que a taxa de juros incide somente sobre o capital inicial, não incidindo, pois, sobre os juros acumulados

$$J = P \times i \times n$$

$$P = \frac{J}{in} \quad i = \frac{J}{Pn} \quad n = \frac{J}{Pi}$$

J = Valor dos juros

P = Valor do capital inicial ou principal

S = Montante ou valor futuro

i = Taxa de juros

n = Prazo

$$S = P + J$$

$$S = P + (P \times i \times n)$$

$$S = P(1 + in)$$

não tenho J

$$S = \frac{J}{in} + J$$

$$S = J(1 + \frac{1}{in})$$

não tenho P

3. Capitalização Composta

É aquela em que a taxa de juros incide sobre o capital inicial, acrescido dos juros acumulados até o período anterior. Nesse regime de capitalização o valor dos juros cresce em função do tempo.

Para chegar à fórmula é possível partir daquela de capitalização simples, conforme o exemplo a seguir:

$$P = 1.000$$

$$i = 1\% \text{ a.m.}$$

$$n = 3 \text{ meses}$$

$$S = ? \text{ (capitalização composta)}$$

1º mês

$$S_1 = 1.000 + 1.000 (0,01) = 1.010,00$$

$$S_1 = P_0 + P_0 in \quad \rightarrow \quad S_1 = P_0(1 + in)$$

2º mês

$$S_2 = 1.010 + 1.010 (0,01) = 1.020,10$$

$$S_2 = S_1 + S_1 in \quad \rightarrow \quad S_2 = S_1(1 + in)$$

$$S_2 = P_0(1 + in)(1 + in) \quad \rightarrow \quad S_2 = P_0(1 + in)^2$$

3º mês

$$S_3 = 1.020,10 + 1.020,10 (0,01) = 1.030,30$$

$$S_3 = S_2 + S_2 in \quad \rightarrow \quad S_3 = S_2(1 + in)$$

$$S_3 = P_0(1 + in)^2(1 + in) \quad \rightarrow \quad S_3 = P_0(1 + in)^3$$

$$S_n = P(1 + i)^n$$

$$P = \frac{S}{(1 + i)^n}$$

$$J = P(1 + i)^n - 1$$

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1$$

$$n = \frac{\log \frac{S}{P}}{\log(1 + i)}$$

4. Equivalência de Taxas

Diz-se que a taxa mensal i_m é equivalente à taxa anual i_a quando:

$$P(1 + i_a) = P(1 + i_m)^{12}$$

Cortando os P's tem-se:

Taxa anual equivalente:

$$i_a = (1 + i_m)^{12} - 1$$

Taxa mensal equivalente:

$$i_m = (1 + i_a)^{\frac{1}{12}} - 1$$

Taxa equivalente:

$$i_q = (1 + i_t)^{\frac{q}{t}} - 1$$

Em que:

i_q = taxa para o prazo que eu quero

i_t = taxa para o prazo que eu tenho

q = prazo que eu quero

t = prazo que eu tenho

5. Descontos

A operação de desconto é normalmente realizada quando se conhece o valor futuro de um título e se quer determinar o seu valor atual.

Enquanto no cálculo dos juros a taxa referente ao período da operação incide sobre o capital inicial ou valor presente, no desconto a taxa do período incide sobre o seu montante ou valor futuro.

5. 1. Descontos Simples (ou bancário ou comercial)

É aquele em que a taxa de desconto incide sempre sobre o montante ou valor futuro.

$$D = S \times d \times n$$

$$P = S - D$$

D = Desconto

d = taxa de desconto

5.2. Cálculo do valor do desconto simples para séries de títulos de mesmo valor

D_T = valor do desconto total

N = nº de títulos (ou prestações)

P_T = valor líquido total dos títulos

d = taxa de desconto

t_1 = prazo do título que vence primeiro

t_n = prazo do título que vence por último

$$D_T = S \times N \times d \times \frac{t_1 + t_n}{2}$$

$$P_T = S \times N - D_T$$

6. Desconto Composto

É aquele em que a taxa de desconto incide sobre o montante ou valor futuro, deduzido dos descontos acumulados até o período imediatamente anterior. Praticamente não é utilizado e tem importância meramente teórica.

$$P = S(1 - d)^n$$

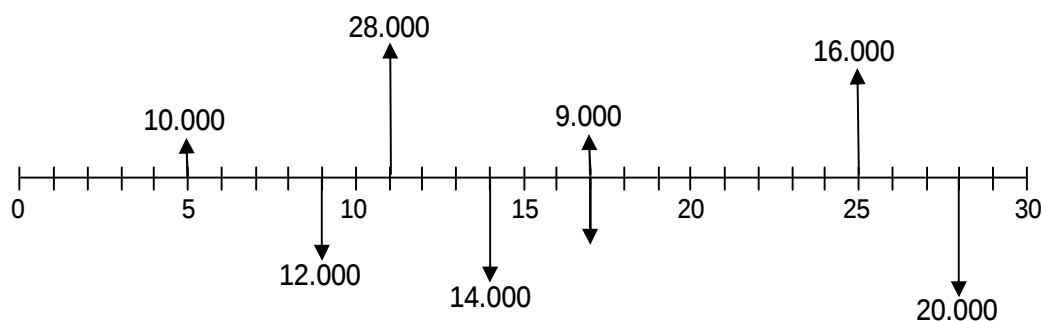
7. Séries de Pagamentos

7.1. Noções sobre fluxo de caixa

Fluxo de caixa pode ser entendido como uma sucessão de recebimentos ou de pagamentos, em dinheiro, previstos para determinado período de tempo.

A representação gráfica se dá conforme o exemplo a seguir:

Recebimentos previstos		Pagamentos previstos	
Dia	Valor (\$)	Dia	Valor (\$)
05	10.000,00	09	12.000,00
11	28.000,00	14	14.000,00
17	9.000,00	17	7.000,00
25	16.000,00	28	20.000,00



No eixo horizontal é representado o tempo, subdividido em períodos unitários (dia, mês, trimestre, ano, etc.). os recebimentos (entradas de caixa) são representados na parte superior do eixo horizontal, indicados por setas orientadas para cima; os

pagamentos (saídas de caixa) são representados na parte inferior daquele eixo, indicados por setas orientadas para baixo. Obviamente, se houver pagamentos e recebimentos num mesmo ponto, poder-se-á representar somente a diferença entre os dois.

7.2. Séries de pagamentos

As séries de pagamentos podem ser definidas como uma sucessão de pagamentos ou recebimentos $V_1, V_2, V_3 \dots V_n$, e com vencimentos sucessivos $t_1, t_2, t_3 \dots t_n$. Será aqui considerado o conceito de capitalização composta.

7.2.1. Séries de pagamentos iguais com termos vencidos (ou postecipados)

Cada termos da série de pagamentos ou recebimentos iguais será representado por “R”; as demais variáveis serão representadas pelos símbolos já conhecidos:

i = taxa de juros, coerentes com a unidade de tempo (mês, trimestre, ano, etc.).

n = número de prestações quase sempre coincidente com o número de períodos unitários.

P = principal, capital inicial, valor atual ou valor presente.

S = montante ou valor futuro

R = termos da série de pagamentos ou recebimentos iguais

a) Fator de Acumulação de Capital (FAC)

O fator de acumulação de capital (fac) representa o montante oriundo da aplicação de n parcelas de uma unidade de capital (real, dólar, salário mínimo, etc.), em determinado intervalo de tempo (semana, quinzena, mês, trimestre, semestre, ano, etc.) e a uma determinada taxa de juros. O FAC é representado por:

$$FAC(i, n) = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

Já o montante oriundo de n recebimentos ou pagamentos a uma taxa i , dentro do conceito de séries de pagamentos com termos vencidos é:

$$S = R \times FAC(i, n)$$

Então,

$$S = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

b) Fator de Formação de Capital (FFC)

O FAC é utilizado na obtenção do montante quando são conhecidos os valores das prestações, a taxa e o número de prestações. Quando a incógnita do problema é o valor das prestações, faz-se:

$$S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \rightarrow \quad R = \frac{S}{\frac{(1+i)^n - 1}{i}} \quad \rightarrow \quad R = S \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} \quad R = S \times FFC(i, n) \quad \rightarrow \quad FFC = \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

c) Fator de Valor Atual (FVA)

Quando se deseja encontrar o valor atual de uma série de pagamentos utiliza-se:

$$P = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i}$$

$$\text{Sendo} \quad FVA = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \quad \rightarrow \quad P = R \times FVA(i, n)$$

d) Fator de Recuperação de Capital (FRC)

É utilizada para determinar o valor da prestação

$$R = P \times \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1}$$

$$\text{Sendo} \quad FRC = \frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \quad \rightarrow \quad R = P \times FRC(i, n)$$

Observe que o FFC é o inverso do FAC, e o FRC o inverso do FVA.

7.2.2. Séries de pagamentos iguais com termos antecipados

Nas séries com termos antecipados, os pagamentos ou recebimentos ocorrem no início de cada período unitário. Assim, a primeira prestação é sempre paga ou recebida no momento “zero”, ou seja, na data do contrato do empréstimo, do financiamento ou de qualquer outra operação que implique pagamentos ou recebimentos de prestações.

Como será visto, todos os problemas de séries de pagamentos antecipados poderão ser resolvidos a partir dos fatores definidos para série de pagamentos com termos vencidos (ou postecipados), bastando multiplicá-los ou dividi-los por $(1+i)$.

$$\begin{aligned}
S &= R \times (1 + i) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] & \rightarrow & S = R \times (1 + i) \times FAC(i, n) \\
R &= S \times \frac{1}{(1+i)} \left[\frac{i}{(1+i)^n - 1} \right] & \rightarrow & R = S \times \frac{1}{(1+i)} \times FFC(i, n) \\
P &= R \times (1 + i) \left[\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n \times i} \right] & \rightarrow & P = R \times (1 + i) \times FVA(i, n) \\
R &= P \times \frac{1}{(1+i)} \left[\frac{(1+i)^n \times i}{(1+i)^n - 1} \right] & \rightarrow & R = P \times \frac{1}{(1+i)} \times FRC(i, n)
\end{aligned}$$

7.2.3. Séries de pagamentos variáveis com termos vencidos (ou postecipados)

Podem ocorrer basicamente dois tipos de variações entre os termos de uma série de pagamentos ou recebimentos: (a) variação de acordo com uma lei de formação matemática (progressão aritmética, geométrica, etc.); (b) variação sem obediência a qualquer lei de formação matemática para o qual a única maneira de obter o seu valor atual ou futuro é calcular individualmente, para cada termo da série, os respectivos valores atuais ou futuros.

Nessa seção serão abordadas somente as séries de pagamentos variáveis em progressão aritmética, crescentes e decrescentes, visto que as progressões geométricas nos dias atuais ainda não têm nenhuma aplicação conhecida no Brasil.

a) Séries de pagamentos variáveis em progressão aritmética crescente

$$\begin{aligned}
S &= \frac{G}{i} \left[(1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i} - n \right] \\
S &= G \left[\frac{1}{i} [(1 + i) \times FAC(i, n) - n] \right] & \rightarrow & S = G \times FACg^{(+)}(i, n) \\
FFCg^{(+)}(i, n) &= \frac{1}{FACg^{(+)}(i, n)} & \rightarrow & G = S \times FFCg^{(+)}(i, n)
\end{aligned}$$

Em que;

G = razão da PA

$FACg^{(+)}$ = Fator de acumulação de capital para séries em gradiente crescentes.

8. Referências Bibliográficas

VIEIRA SOBRINHO, José Dutra. **Matemática Financeira**. 7. ed. São Paulo: Atlas, 2006.

REZENDE, José Luiz Pereira de; OLIVEIRA, Antonio Donizette de. **Análise econômica e social de projetos florestais**: matemática financeira, formulação de projetos, avaliação de projetos, localização de projetos, análise de custo-benefício. 2. ed., rev. e atual. Viçosa, MG: UFV, 2008.